Quelques exemples d'analyse d'erreur de récurrences
à l'aide de séries génératrices

Marc Mezzarobba

CNRS, Sorbonne Université

RAIM, 14 novembre 2018

Contexte

Travail à ses débuts

Une observation, pas vraiment de résultats

Exposé basé sur des discussions avec
G. Melquiond, F. Johansson et P. Zimmermann

Les techniques d’analyse d’erreur sont classiques

L’utilisation de séries génératrices, moins (?)

Un exemple jouet

[Boldo 2009]

$$c_{n+1} = 2\,c_n - c_{n-1} \qquad (c_0 = \diamond(1/3), c_{-1} = 0)$$

	Intervalles	Flottants
$n = 0$	$[0.333333333333333 \pm 1.49e-17]$	0.333333333333333
5	$[2.00000000000000 \pm 3.78e-15]$	2.00000000000000
10	$[3.666666666667 \pm 5.74e-13]$	3.66666666666667
15	$[5.3333333333 \pm 5.29e-11]$	5.33333333333334
20	$[7.00000000 \pm 1.60e-9]$	7.00000000000001
25	$[8.666667 \pm 4.65e-7]$	8.66666666666668
30	$[10.3333 \pm 4.41e-5]$	10.3333333333333
35	$[12.000 \pm 8.82e-4]$	12.0000000000000
40	$[1.4e+1 \pm 0.406]$	13.6666666666667
45	$[\pm 21.3]$	15.3333333333334
50	$[\pm 5.04e+2]$	17.0000000000000

Analyse d'erreur naïve

(erreur absolue / virgule fixe pour simplifier)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\ \tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\ &= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u} \end{aligned}$$

Analyse d'erreur naïve

(erreur absolue / virgule fixe pour simplifier)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\ \tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\ &= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$|\tilde{c}_{n+1} - c_{n+1}| \leqslant 2\,|\tilde{c}_n - c_n| + |\tilde{c}_{n-1} - c_{n-1}| + \mathbf{u}$$

Analyse d'erreur naïve

(erreur absolue / virgule fixe pour simplifier)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\ \tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\ &= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$|\tilde{c}_{n+1} - c_{n+1}| \leqslant 2\,|\tilde{c}_n - c_n| + |\tilde{c}_{n-1} - c_{n-1}| + \mathbf{u}$$

- récurrence : $|\tilde{c}_n - c_n| \leqslant 3^n\,\mathbf{u}$

Analyse d'erreur naïve

(erreur absolue / virgule fixe pour simplifier)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\ \tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\ &= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$|\tilde{c}_{n+1} - c_{n+1}| \leqslant 2\,|\tilde{c}_n - c_n| + |\tilde{c}_{n-1} - c_{n-1}| + \mathbf{u}$$

- récurrence : $|\tilde{c}_n - c_n| \leqslant 3^n\,\mathbf{u}$

Analyse d'erreur naïve

(erreur absolue / virgule fixe pour simplifier)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\ \tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\ &= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$|\tilde{c}_{n+1} - c_{n+1}| \leqslant 2\,|\tilde{c}_n - c_n| + |\tilde{c}_{n-1} - c_{n-1}| + \mathbf{u}$$

- récurrence : $|\tilde{c}_n - c_n| \leqslant 3^n\,\mathbf{u}$
- un poil plus fin :

  $$|\tilde{c}_n - c_n| \leqslant \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n - 2}{4}\,\mathbf{u} \approx 2.4^{\mathbf{n}}\,\mathbf{u}$$

Analyse d'erreur naïve

(erreur absolue / virgule fixe pour simplifier)

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\
\tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\
&= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$|\tilde{c}_{n+1} - c_{n+1}| \leqslant 2\,|\tilde{c}_n - c_n| + |\tilde{c}_{n-1} - c_{n-1}| + \mathbf{u}$$

- récurrence : $|\tilde{c}_n - c_n| \leqslant 3^n\,\mathbf{u}$
- un poil plus fin :

  $$|\tilde{c}_n - c_n| \leqslant \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n - 2}{4}\,\mathbf{u} \approx 2.4^n\,\mathbf{u}$$

(Note : c'est à peu près ce que fait l'arithmétique d'intervalles.)

Analyse d'erreur plus raisonnable

(virgule fixe)

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\
\tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\
&= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant u
\end{aligned}
$$

$$\delta_n = \tilde{c}_n - c_n$$

$$\delta_{n+1} = 2\,\delta_n - \delta_{n-1} + \varepsilon_n \qquad (\delta_0 = \delta_1 = 0)$$

erreur globale ↗ ↖ *erreur locale*

Analyse d'erreur plus raisonnable

(virgule fixe)

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\ \tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\ &= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\delta_n = \tilde{c}_n - c_n$$

$$\delta_{n+1} = 2\,\delta_n - \delta_{n-1} + \varepsilon_n \qquad (\delta_0 = \delta_1 = 0)$$

erreur globale ↗ ↖ *erreur locale*

- $\delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\,\varepsilon_{n-k}$

  $|\delta_n| \leqslant \frac{n\,(n-1)}{2}\,\mathbf{u}$

Analyse d'erreur plus raisonnable

(virgule fixe)

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} &= 2\,c_n - c_{n-1} \\
\tilde{c}_{n+1} &= \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1}) \\
&= 2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1} + \varepsilon_n \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$\delta_n = \tilde{c}_n - c_n$$

$$\delta_{n+1} = 2\,\delta_n - \delta_{n-1} + \varepsilon_n \qquad (\delta_0 = \delta_1 = 0)$$

erreur globale *erreur locale*

- $\delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\,\varepsilon_{n-k}$

  $|\delta_n| \leqslant \dfrac{n\,(n-1)}{2}\,\mathbf{u}$

Séries génératrices

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \longleftrightarrow \quad a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n$$

$$\delta_{n+1} = 2\,\delta_n - \delta_{n-1} + \varepsilon_n$$

$$\Big\downarrow \; \textstyle\sum_n \square\, z^n$$

$$z^{-1}\,\delta(z) = 2\,\delta(z) - z\,\delta(z) + \varepsilon(z)$$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\varepsilon(z)$$

- Formules (produit, composée, ...)
- Méthodes analytiques
  - Extraction de coefficients
  - Asymptotique
- Séries majorantes
- Calcul efficace
- ...

$$z \sum_n a_n\, z^n = \sum_n a_{n-1}\, z^n$$

Séries majorantes

On note $\quad \mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}} \quad$ lorsque $\quad \forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f_n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}.$

$$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$$

Séries majorantes

On note $\mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}}$ lorsque $\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f_n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{n}$.

$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\varepsilon(z)$$

Séries majorantes

On note $\mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}}$ lorsque $\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f}_\mathbf{n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{n}$.

$$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\varepsilon(z)$$

- $\varepsilon(z) = \sum_n \varepsilon_n z^n \ll \frac{\mathbf{u}}{1-z}$

Séries majorantes

On note $\mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}}$ lorsque $\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f_n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{n}}$.

$$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\varepsilon(z)$$

- $\varepsilon(z) = \sum_n \varepsilon_n z^n \ll \frac{\mathbf{u}}{1-z}$
- $\frac{z}{(1-z)^2} \gg 0$

Séries majorantes

On note $\mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}}$ lorsque $\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f_n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{n}.$

$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \varepsilon(z)$$

- $\varepsilon(z) = \sum_n \varepsilon_n z^n \ll \frac{u}{1-z}$
- $\frac{z}{(1-z)^2} \gg 0$
- si $f(z) \ll \hat{f}(z)$ et $g(z) \ll \hat{g}(z)$,

  $f(z)\, g(z) \ll \hat{f}(z)\, \hat{g}(z)$

$$\Big|[z^n]\left(f(z)\, g(z)\right)\Big| = \Big|\sum_{i+j=n} f_i\, g_j\Big| \leqslant \sum_{i+j=n} \hat{f}_i\, \hat{g}_j = [z^n]\left(\hat{f}(z)\, \hat{g}(z)\right)$$

Séries majorantes

On note $\mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}}$ lorsque $\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f_n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{n}.$

$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\varepsilon(z)$$

$$\ll \frac{\mathbf{u}\,z}{(1-z)^3}$$

- $\varepsilon(z) = \sum_n \varepsilon_n z^n \ll \dfrac{\mathbf{u}}{1-z}$
- $\dfrac{z}{(1-z)^2} \gg 0$
- si $f(z) \ll \hat{f}(z)$ et $g(z) \ll \hat{g}(z)$,

  $f(z)\,g(z) \ll \hat{f}(z)\,\hat{g}(z)$

$$\left|[z^n]\left(f(z)\,g(z)\right)\right| = \left|\sum_{i+j=n} f_i\,g_j\right| \leqslant \sum_{i+j=n} \hat{f}_i\,\hat{g}_j = [z^n]\left(\hat{f}(z)\,\hat{g}(z)\right)$$

Séries majorantes

On note $\mathbf{f} \ll \hat{\mathbf{f}}$ lorsque $\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{f_n}| \leqslant \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{n}$.

$\left(f(z) = \sum_n f_n z^n, \quad \hat{f}(z) = \sum_n \hat{f}_n z^n\right)$

$$\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\varepsilon(z)$$

$$\ll \frac{\mathbf{u}\,z}{(1-z)^3}$$

$$|\delta_n| \leqslant \frac{n\,(n-1)}{2}\,\mathbf{u}$$

- $\varepsilon(z) = \sum_n \varepsilon_n z^n \ll \frac{\mathbf{u}}{1-z}$
- $\frac{z}{(1-z)^2} \gg 0$
- si $f(z) \ll \hat{f}(z)$ et $g(z) \ll \hat{g}(z)$,
  $f(z)\,g(z) \ll \hat{f}(z)\,\hat{g}(z)$

$$\Big|[z^n]\,\big(f(z)\,g(z)\big)\Big| = \Big|\sum_{i+j=n} f_i\,g_j\Big| \leqslant \sum_{i+j=n} \hat{f}_i\,\hat{g}_j = [z^n]\,\big(\hat{f}(z)\,\hat{g}(z)\big)$$

Polynômes de Legendre

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2\,n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)$$

$x = \diamond(17/18)$

	Intervalles	Flottants
$n = 0$	1.000000000000000	1.00000000000000
10	$[-0.386103889710 \pm 3.61\mathrm{e}-13]$	-0.386103889709935
20	$[\ \ 0.29953942 \pm 5.12\mathrm{e}-9]$	$0.29953941584394\textcolor{red}{1}$
30	$[-0.25184 \pm 7.04\mathrm{e}-6]$	-0.251843502730021
40	$[\ \ 0.2 \pm 0.0280]$	0.214139934045693
50	$[\pm 56.2]$	-0.179433059907698
60	$[\pm 2.31\mathrm{e}+5]$	0.145569066400857
70	$[\pm 9.66\mathrm{e}+8]$	$-0.1120286960441\textcolor{red}{30}$
80	$[\pm 4.09\mathrm{e}+12]$	$0.078978713542448\textcolor{red}{8}$
90	$[\pm 1.74\mathrm{e}+16]$	$-0.0469035940021\textcolor{red}{142}$
100	$[\pm 7.45\mathrm{e}+19]$	$0.01642951460849\textcolor{red}{27}$

Polynômes de Legendre

[Johansson & M. 2018]

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)\,x\,p_n - n\,p_{n-1}\right] \qquad x \text{ fixé, } p_n = P_n(x)$$

$$\tilde{p}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)\,x\,\tilde{p}_n - n\,\tilde{p}_{n-1}\right] + \varepsilon_{n+1} \qquad |\varepsilon_n| \leqslant 3\,\mathbf{u} \text{ (FxP)}$$

$$\delta_n = \tilde{p}_n - p_n \qquad (n+1)\,\delta_{n+1} = (2n+1)\,x\,\delta_n - n\,\delta_{n-1} + (n+1)\,\varepsilon_{n+1}$$

$$(1 - 2\,x\,z + z^2)\,\delta'(z) = z\,(x - z)\,\delta(z) + \varepsilon'(z)$$

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}}$$

$$z \sum_n a_n\,z^n = \sum_n a_{n-1}\,z^n \qquad \frac{d}{dz}\left(\sum_n f_n\,z^n\right) = \sum_n (n+1)\,f_{n+1}\,z^n$$

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}}$$

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \qquad\qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\,\mathbf{u}}{1-z}$$

$$\frac{3\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}$$

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} \qquad\qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\,\mathbf{u}}{1-z}$$

$$\frac{3\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-e^{i\theta}z)\,(1-e^{-i\theta}z)}}$ $\qquad x = \cos\theta$
- or $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{\pm i\theta}z}} \ll \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ $\qquad$ par composition de $\dfrac{1}{\sqrt{1-z}} \in \mathbb{R}_+[[z]]$ et $e^{i\theta}\,z$
- donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} \ll \dfrac{1}{1-z}$

(En fait $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} = \sum_n P_n(x)\,z^n$, et il est classique que $|P_n(x)| \leqslant 1$.)

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \qquad\qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\mathbf{u}}{1-z}$$

$$\frac{3\mathbf{u}}{(1-z)^2}\,\frac{1}{1-z}$$

- $$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^{i\theta}z)\,(1-e^{-i\theta}z)}} \qquad x = \cos\theta$$
- or $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{\pm i\theta}z}} \ll \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ par composition de $\dfrac{1}{\sqrt{1-z}} \in \mathbb{R}_+[[z]]$ et $e^{i\theta}z$
- donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \ll \dfrac{1}{1-z}$

(En fait $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_n P_n(x)\,z^n$, et il est classique que $|P_n(x)| \leqslant 1$.)

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\,\mathbf{u}}{1 - z}$$

$$\int \frac{3\,\mathbf{u}}{(1 - z)^2}\,\frac{1}{1 - z}$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - e^{i\theta} z)\,(1 - e^{-i\theta} z)}}$ $\qquad x = \cos\theta$
- or $\dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{\pm i\theta} z}} \ll \dfrac{1}{\sqrt{1 - z}}$ $\qquad$ par composition de $\dfrac{1}{\sqrt{1 - z}} \in \mathbb{R}_+[[z]]$ et $e^{i\theta} z$
- donc $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} \ll \dfrac{1}{1 - z}$

(En fait $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} = \sum_n P_n(x)\, z^n$, et il est classique que $|P_n(x)| \leqslant 1$.)

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\mathbf{u}}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-z} \int \frac{3\mathbf{u}}{(1-z)^2} \frac{1}{1-z}$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-e^{i\theta}z)(1-e^{-i\theta}z)}}$ $\qquad x = \cos\theta$
- or $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{\pm i\theta}z}} \ll \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ $\qquad$ par composition de $\dfrac{1}{\sqrt{1-z}} \in \mathbb{R}_+[[z]]$ et $e^{i\theta} z$
- donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \ll \dfrac{1}{1-z}$

(En fait $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_n P_n(x)\, z^n$, et il est classique que $|P_n(x)| \leqslant 1$.)

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} \qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\,\mathbf{u}}{1-z}$$

$$\delta(z) \ll \frac{1}{1-z} \int \frac{3\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}\,\frac{1}{1-z}$$

- $$\frac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^{i\theta}z)\,(1-e^{-i\theta}z)}} \qquad x = \cos\theta$$
- or $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{\pm i\theta}z}} \ll \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ par composition de $\dfrac{1}{\sqrt{1-z}} \in \mathbb{R}_+[[z]]$ et $e^{i\theta}\,z$
- donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} \ll \dfrac{1}{1-z}$

(En fait $\dfrac{1}{\sqrt{1-2\,x\,z+z^2}} = \sum_n P_n(x)\,z^n$, et il est classique que $|P_n(x)| \leqslant 1$.)

Majoration de la solution

$$\delta(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \int_0^z \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \qquad \varepsilon(z) \ll \frac{3\,\mathbf{u}}{1-z}$$

$$\delta(z) \ll \frac{1}{1-z} \int \frac{3\,\mathbf{u}}{(1-z)^2} \frac{1}{1-z} = \frac{3}{2} \frac{1}{(1-z)^3} \mathbf{u}$$

- $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^{i\theta}z)\,(1-e^{-i\theta}z)}}$ $\qquad x = \cos\theta$
- or $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1-e^{\pm i\theta}z}} \ll \frac{1}{\sqrt{1-z}}$ $\qquad$ par composition de $\frac{1}{\sqrt{1-z}} \in \mathbb{R}_+[[z]]$ et $e^{i\theta}\,z$
- donc $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \ll \frac{1}{1-z}$

(En fait $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_n P_n(x)\,z^n$, et il est classique que $|P_n(x)| \leqslant 1$.)

Retour sur l'exemple jouet

$$c_{n+1} = 2\,c_n - c_{n-1}$$

$$\tilde{c}_{n+1} = \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1})$$

$$= (2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1})\,(1 + \varepsilon_n)$$

- **en flottants ce coup-ci**

$|\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u}$

$$\delta_{n+1} - c_{n+1}\,\varepsilon_n = (2\,\delta_n - \delta_{n-1})\,(1 + \varepsilon_n)$$

$$\delta_n = \tilde{c}_n - c_n$$

$$\delta_{n+1} - 2\,\delta_n - \delta_{n-1} = \varepsilon_n\,(c_{n+1} + 2\,\delta_n - \delta_{n-1})$$

$$(z^{-1} - 2 + z)\,\delta(z) = \varepsilon(z) \odot \left(z^{-1}\,c(z) + (2 - z)\,\delta(z)\right)$$

$$\delta(z) = \frac{\varepsilon(z) \odot \left(c(z) + z\,(2 - z)\,\delta(z)\right)}{(1 - z)^2}$$

Retour sur l'exemple jouet

$$c_{n+1} = 2\,c_n - c_{n-1}$$

$$\tilde{c}_{n+1} = \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1})$$

- **en flottants ce coup-ci**

$$= (2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1})\,(1 + \varepsilon_n) \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u}$$

$$\delta_{n+1} - c_{n+1}\,\varepsilon_n = (2\,\delta_n - \delta_{n-1})\,(1 + \varepsilon_n)$$

$$\delta_n = \tilde{c}_n - c_n$$

$$\delta_{n+1} - 2\,\delta_n - \delta_{n-1} = \varepsilon_n\,(c_{n+1} + 2\,\delta_n - \delta_{n-1})$$

$$(z^{-1} - 2 + z)\,\delta(z) = \varepsilon(z) \odot \left(z^{-1}\,c(z) + (2 - z)\,\delta(z)\right)$$

$$\delta(z) = \frac{\varepsilon(z) \odot \left(c(z) + z\,(2 - z)\,\delta(z)\right)}{(1 - z)^2}$$

Retour sur l'exemple jouet

$$c_{n+1} = 2\,c_n - c_{n-1}$$

$$\tilde{c}_{n+1} = \diamond(2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1})$$

$$= (2\,\tilde{c}_n - \tilde{c}_{n-1})\,(1+\varepsilon_n)$$

- **en flottants ce coup-ci**

$$|\varepsilon_n| \leqslant \mathbf{u}$$

$$\delta_{n+1} - c_{n+1}\,\varepsilon_n = (2\,\delta_n - \delta_{n-1})\,(1+\varepsilon_n)$$

$$\delta_n = \tilde{c}_n - c_n$$

$$\delta_{n+1} - 2\,\delta_n - \delta_{n-1} = \varepsilon_n\,(c_{n+1} + 2\,\delta_n - \delta_{n-1})$$

$$(z^{-1} - 2 + z)\,\delta(z) = \varepsilon(z) \odot \big(z^{-1}\,c(z) + (2-z)\,\delta(z)\big)$$

$$\delta(z) = \frac{\varepsilon(z) \odot \big(c(z) + z\,(2-z)\,\delta(z)\big)}{(1-z)^2}$$

$$\Delta(z) = \sum_n |\delta_n|\,z^n$$

$$c(z) \ll \hat{c}(z)$$

$$\Delta(z) \ll \frac{z\,(2+z)\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}\,\Delta(z) + \frac{\hat{c}(z)\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}$$

Équations majorantes

Lemme **[Cauchy ?]**

Soient $\hat{a}(z), \hat{b}(z) \in \mathbb{R}_+[[z]]$ avec $\hat{a}(0) = 0$. Suppons $y \in \mathbb{R}_+[[z]]$ t.q.

$$y(z) \ll \hat{a}(z)\, y(z) + \hat{b}(z).$$

Alors $y(z)$ est bornée par la solution de $\hat{y}(z) = \hat{a}(z)\, \hat{y}(z) + \hat{b}(z)$, i.e.,

$$y(z) \ll \hat{y}(z) = \frac{\hat{b}(z)}{1 - \hat{a}(z)}.$$

Preuve.

- $y_0 \leqslant \hat{b}_0 = \hat{y}_0$
- $y_n \leqslant \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_{n-i}\, y_i + \hat{b}_n$

Équations majorantes

Lemme **[Cauchy ?]**

Soient $\hat{a}(z), \hat{b}(z) \in \mathbb{R}_+[[z]]$ avec $\hat{a}(0) = 0$. Suppons $y \in \mathbb{R}_+[[z]]$ t.q.

$$y(z) \ll \hat{a}(z)\, y(z) + \hat{b}(z).$$

Alors $y(z)$ est bornée par la solution de $\hat{y}(z) = \hat{a}(z)\, \hat{y}(z) + \hat{b}(z)$, i.e.,

$$y(z) \ll \hat{y}(z) = \frac{\hat{b}(z)}{1 - \hat{a}(z)}.$$

Preuve.

- $y_0 \leqslant \hat{b}_0 = \hat{y}_0$
- $y_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{n-i}\, y_i + \hat{b}_n$

Équations majorantes

Lemme **[Cauchy ?]**

Soient $\hat{a}(z), \hat{b}(z) \in \mathbb{R}_+[[z]]$ avec $\hat{a}(0) = 0$. Suppons $y \in \mathbb{R}_+[[z]]$ t.q.

$$y(z) \ll \hat{a}(z)\, y(z) + \hat{b}(z).$$

Alors $y(z)$ est bornée par la solution de $\hat{y}(z) = \hat{a}(z)\, \hat{y}(z) + \hat{b}(z)$, i.e.,

$$y(z) \ll \hat{y}(z) = \frac{\hat{b}(z)}{1 - \hat{a}(z)}.$$

Preuve.

- $y_0 \leqslant \hat{b}_0 = \hat{y}_0$
- $y_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{n-i}\, y_i + \hat{b}_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{n-i}\, \hat{y}_i + \hat{b}_n = \hat{y}_n$

Borne sur l'erreur en flottants

$$\Delta(z) \ll \underbrace{\frac{z\,(2+z)\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}}_{\hat{a}(z)} \Delta(z) + \underbrace{\frac{\hat{c}(z)\,\mathbf{u}}{(1-z)^2}}_{\hat{b}(z)}$$

$$c(z) = \frac{c_0}{(1-z)^2} \ll \frac{|c_0|}{(1-z)^2}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(z) &\ll \frac{\hat{b}(z)}{1-\hat{a}(z)} \\
&= \frac{\hat{c}(z)\,\mathbf{u}}{1-2\,(1+\mathbf{u})\,z+(1-\mathbf{u})\,z^2} \\
&= \frac{\hat{c}(z)\,\mathbf{u}}{(1-\boldsymbol{\alpha}\,z)\,(1-\boldsymbol{\alpha}^{-1}\,z)} \\
&\ll \frac{|c_0|\mathbf{u}}{(1-\boldsymbol{\alpha}\,z)^4}
\end{aligned}$$

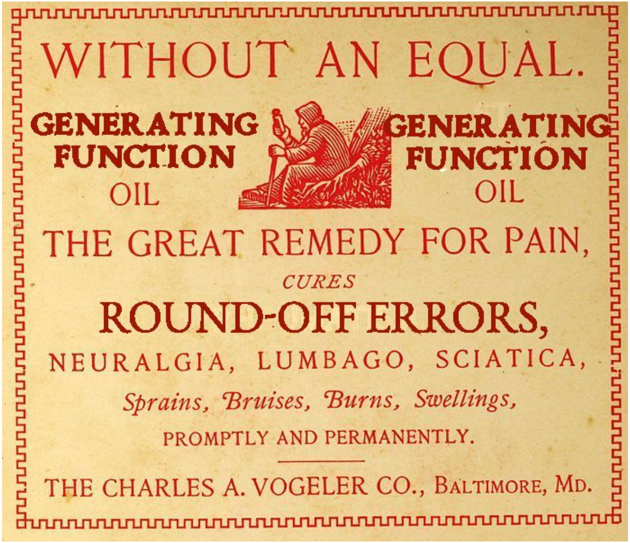
$\boldsymbol{\alpha} = 1 + \sqrt{3\,\mathbf{u}} + O(u)$

$\boldsymbol{\alpha} \leqslant 1 + 2\sqrt{\mathbf{u}}$ pour $u \leqslant 0.008$

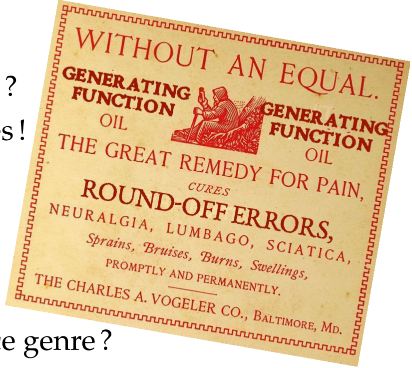
$$\longrightarrow \quad |\delta_n| \leqslant \frac{n^3}{6}\,\alpha^n\,\mathbf{u}$$

(δ_n = erreur *absolue* sur u_n)

Satisfait ou remboursé !



Conclusion



Une analyse d'erreur pénible ?

Essayez les séries génératrices !

- Erreur locale ↔ erreur globale
- Expressions exactes ou équations
- Séries majorantes

Qui a déjà vu des choses de ce genre ?

Des exemples intéressants ?

Analyse d'erreur algorithmique pour les séries solutions d'équa. diff. linéaires à coeff. polynomiaux

Récurrences "à rebours" (Miller) ?

Polynômes orthogonaux généraux ?

Schémas d'intégration numérique ?

Merci !